

第四节 正弦交流电路的一般分析方法

- 一、基尔霍夫定律的相量形式
 - **1.** 相量形式的基尔霍夫电流定律
 - 在正弦交流电路中，流出任意节点的各支路电流相量的代数和恒等于零。其中电流前的正负号由其参考方向决定，若支路电流流出节点，取正号，流入节点取负号。

$$\sum \dot{I} = 0$$

- **[例 3.11]** 如图 **3-22** (**a**)、(**b**) 所示电路中，已知电流表 **A1**、**A2**、**A3** 都是 **10A**，求电路中电流表 **A** 的读数。

$$\dot{U} = U\angle 0^\circ$$

[解] 设端电压为参考相量

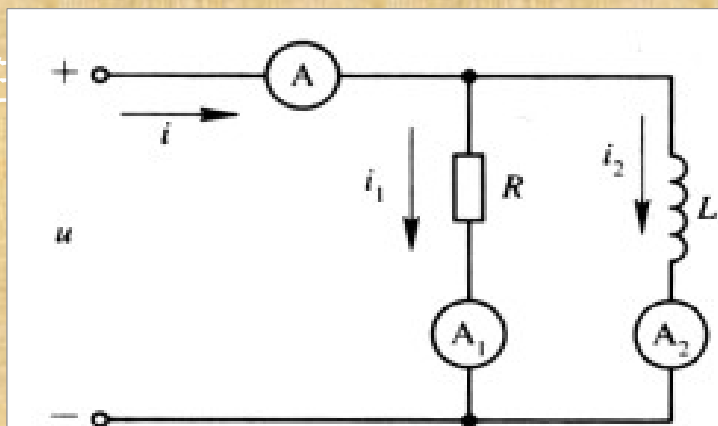
(**a**) 电流参考 $\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ$ **3-22a**) $\dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ$ 元件性质可知

由 **KCL** 得 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ + 10\angle -90^\circ = 10 - 10j = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ$

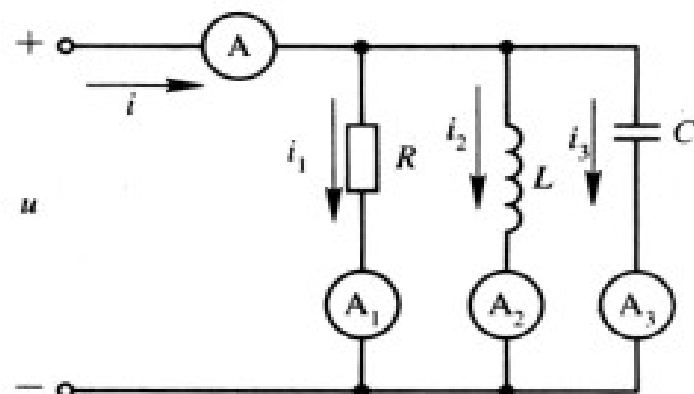
$$10\sqrt{2}$$

电流表的读数为

A。



(a)



(b)

- (**b**) 电流参考方向如图 **3-22b**) 所示,

(电阻电流与电压同相位)

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ$$

$$\dot{I}_3 = 10\angle 90^\circ$$

(电感电流滞后于电压 **90°**)

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10\angle 0^\circ + 10\angle -90^\circ + 10\angle 90^\circ = 10 - 10j + 10j = 10$$

电压 **90°**)

由 **KCL** 得

(**A**)

电流表的读数为 **10A** 。

• 2. 相量形式的基尔霍夫电压定律

- 在正弦交流电路中，任一闭合回路中各段电压相量的代数和恒等于零。

$$\sum \dot{U} = 0$$

【例 3.12】 如图 **3-23** (**a**)、(**b**) 所示电路中，已知电流表 **V1**、**V2**、**V3** 都是 **10V**，求电路中电压表 **V** 的读数。

$$\dot{I} = I\angle 0^\circ$$

【解】 设电流为参考相量

(**a**) 电流及各电压的参考方向如图 **3-23a**) 所示，根据元件性质，有

$$\dot{U}_1 = 10\angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_2 = 10\angle 90^\circ$$

(电阻电压与电流同相位)

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ = 10 + 10j = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$10\sqrt{2}$$

前于电流 **90°**)

(电感电压超前于电流 **90°**)

- 电流及各电压的参考方向如图 **3-23b**) 所示,

$$\dot{U}_1 = 10\angle 0^\circ$$

(电阻电压与

电流同相位)

$$\dot{U}_2 = 10\angle 90^\circ$$

(电感电压超前

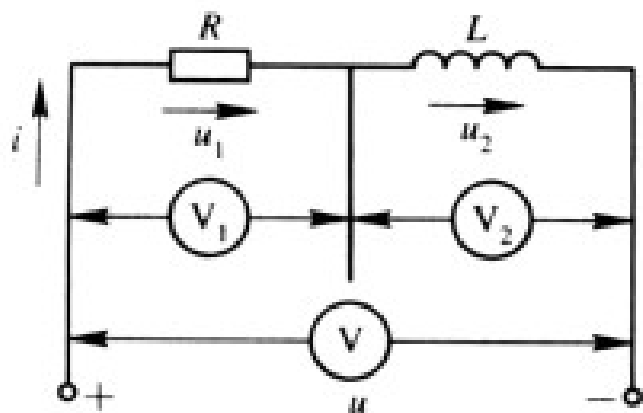
于电流 **90°**)

$$\dot{U}_3 = 10\angle -90^\circ$$

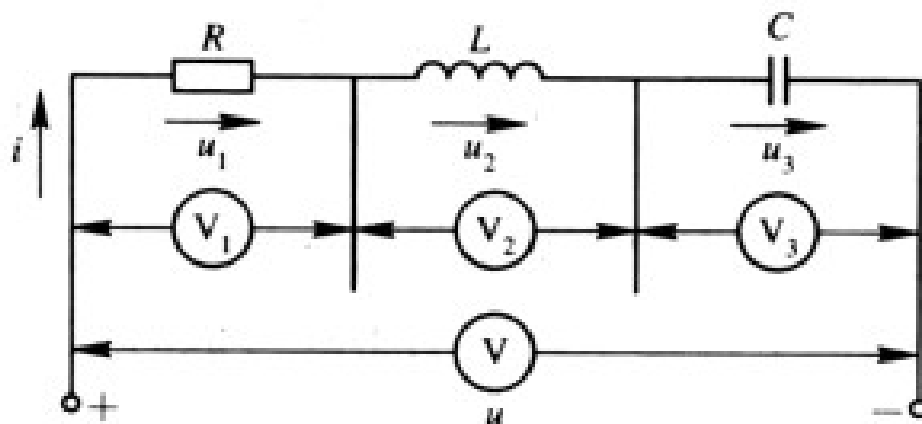
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ + 10\angle -90^\circ = 10 + 10j - 10j = 10$$

后于电流 **90°**)

由 **KVL** 得



(a)



(b)

• 二、复阻抗的串联和并联

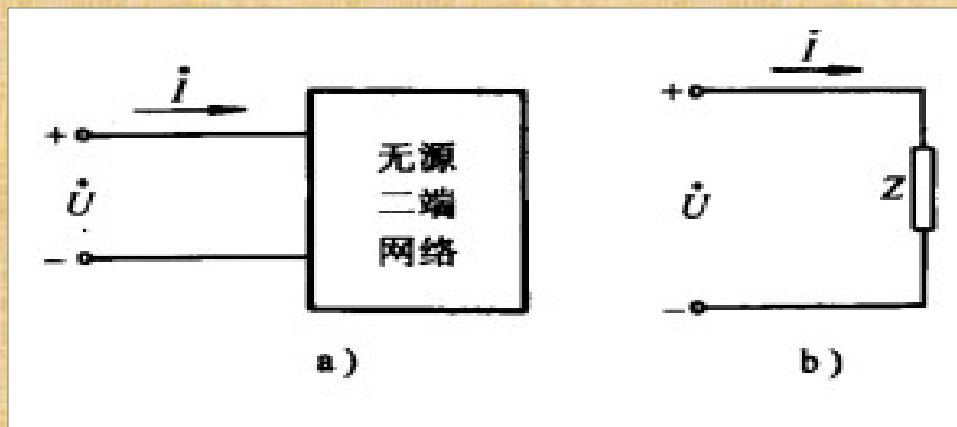
• 1. 复阻抗

有一无源二端网络，其端口电压和电流均用相量表示，如图 **3-24(a)** 所示。

阻抗：端口电压相量和端口电流相量的比值，用 **Z** 表示。

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

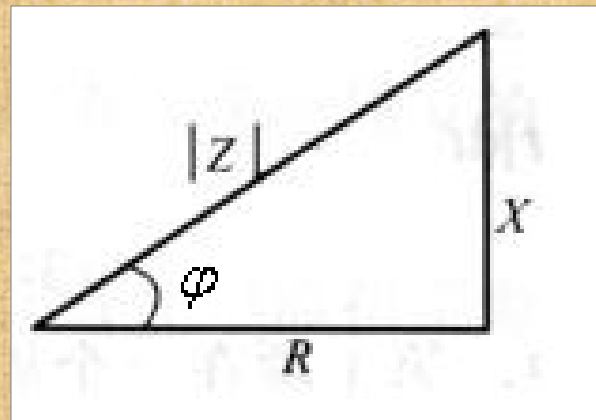
阻抗等效电路 $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i} = |Z|\angle\varphi$ **b)** 所示。



- **Z** 是一个复数，所以又称为复阻抗， **|Z|** 是阻抗的模， φ 为阻抗角。
- 复阻抗的图形符号与电阻的图形符号相似，单位与电阻同为 Ω 。
- **Z = R+jX**， **Z** 的实部为 **R**，称为“电阻”， **Z** 的虚部为 **X**，称为“电抗”。 **|Z|** 和 **R**、**X** 的关系也可用直角三角形表示，称为阻抗三角形。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R}$$



- **2. 阻抗的串联**

- 当 **n** 个复阻抗 **Z1**、**Z2**、...、**Zn** 串联时，等效复阻抗 **Z** 等于各个复阻抗之和，即

- $$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

- **3. 阻抗的并联**

- 当 **n** 个复阻抗 **Z1**、**Z2**、...、**Zn** 并联时，等效复阻抗 **Z** 的倒数等于各个复阻抗的倒数之和。

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

- 导纳：复阻抗 **Z** 的倒数，用大写字母 **Y** 表示
- 几个并联复导纳的等效导纳等于各个导纳之和

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

- 欧姆定律的相量形式可表达为如下两种形式

$$\dot{U} = \dot{I}Z$$

$$\dot{I} = \dot{U}Y$$

或

- 当只有两个复阻抗并联时，
- 可以不将复阻抗化为复导纳，直接用复阻抗进行运算，其等效阻抗为

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- 在正弦交流电路中，求解串联或并联电路的等效复阻抗的方法与求解串联或并联电路的等效电阻的方法相似，只不过复阻抗的计算需要按照复数运算法则进行。

- **[例 3.13]** 在图 3-28 中，两个复阻抗分别是 $Z_1 = j10\Omega$, $Z_2 = (10 - j10)\Omega$ ，交流电源电压 $u = 220\sqrt{2} \sin \omega t$ V，试求电路中的总阻抗 Z 及 I_1 流 I_2 、和

$$|Z_1| = \sqrt{10^2 + 0} = 10$$

$$\varphi_1 = 90^\circ$$

[解] $|Z_2| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.14$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{-10}{10} = -45^\circ$$

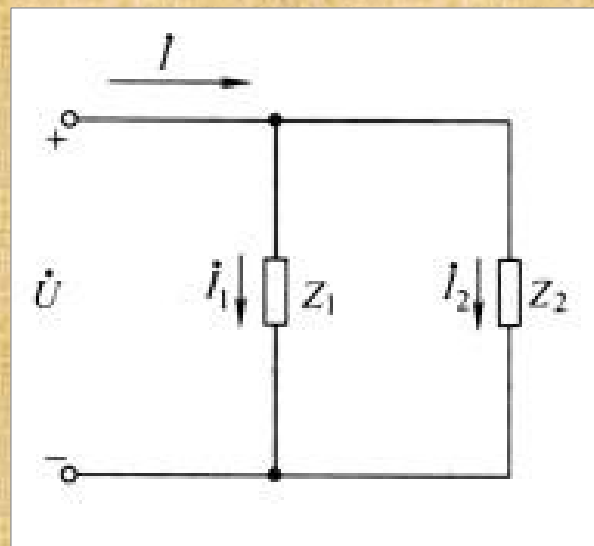
Ω
 I_2

可用两种方法求总电流

(1) $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{10\angle 90^\circ \times 14.14\angle -45^\circ}{j10 + 10 - j10} = 14.14\angle 45^\circ$

得总电流的相量为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{14.14\angle 45^\circ} = 15.6\angle -45^\circ$$



(2) 利用 $Y = Y_1 + Y_2$ 进行计算

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{10\angle 90^\circ} = 0.1\angle -90^\circ = -j0.1$$

S

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{14.14\angle -45^\circ} = 0.07\angle 45^\circ = 0.05 + j0.05$$

S

$$Y = Y_1 + Y_2 = -j0.1 + 0.05 + j0.05 = 0.05 - j0.05 = 0.05\sqrt{2}\angle -45^\circ$$

S

同样得总 $\dot{I} = Y\dot{U} = 0.05\sqrt{2}\angle -45^\circ \times 220\angle 0^\circ = 15.6\angle -45^\circ$

A

因此

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} = \frac{14.14\angle -45^\circ}{j10 + 10 - j10} \times 15.6\angle -45^\circ = 22\angle -90^\circ$$

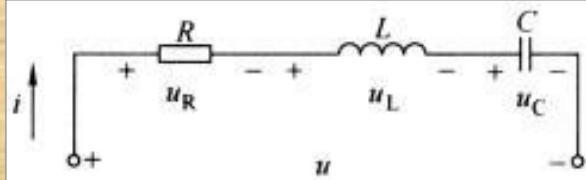
A

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} = \frac{j10}{j10 + 10 - j10} \times 15.6\angle -45^\circ = 15.6\angle 45^\circ$$

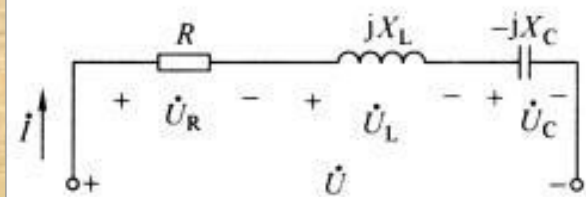
A

第五节 电阻、电感、电容串联电路

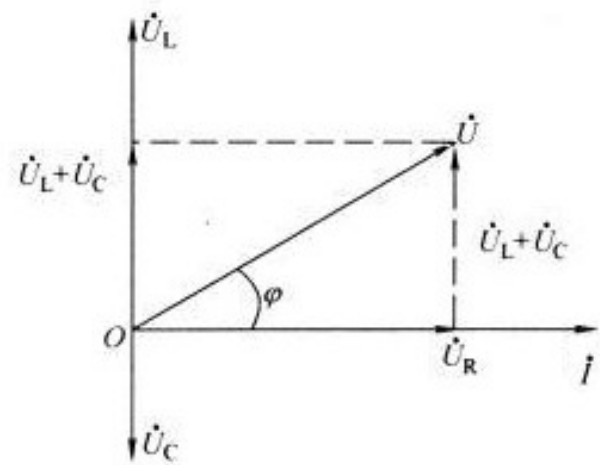
- 一、**RLC** 串联电路的电压电流关系
 - 1. 电压和电流的关系
 - 电阻 **R**、电感 **L**、电容 **C** 串联构成的电路叫做 **RLC** 串联电路，如图 **3-29a)** 所示。选取电流 **i** 为参考正弦量，即设
$$I = I_m \sin \omega t$$
 -
 - 则根据
$$u_R = RI_m \sin \omega t = U_{Rm} \sin \omega t$$
$$u_L = X_L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ)$$
$$u_C = X_C I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = U_{Cm} \sin(\omega t - 90^\circ)$$
可得各元件的电压为
 - 根据基尔霍夫电压定律可得



(a) 电路图



(b) 电路图



(c) 相量图

$$u = u_R + u_L + u_C$$

- **RLC** 串联电路的相量模型如图 **3-29b)** 所示。

- 根据基尔霍夫电压定律的相量形式可得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

- 各电流电压的相量如下

$$\dot{I} = I\angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = U_R\angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = U_L\angle 90^\circ$$

$$\dot{U}_C = jX_C\dot{I} = U_C\angle -90^\circ$$

- 作出 $\dot{I}$ 、 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$ 、 $\dot{U}$ 的相量图，如图 **3-29c)** 所示。用相量求和的法则，作出电压 $\dot{u}$ 的相量。
- 由相量图可知，电压相量 $\dot{U}$ 、 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L + \dot{U}_C$

正好构成一个直角三角形，这个直角三角形被称为电压三角形。利用电压三角形可以得出总电压与电阻、电感、电容电压的有效值关系式，即

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$

- 式中， $\mathbf{U_X = U_L - U_C}$ 称为电抗电压，表示电感与电容串联后的总压降，其正、负以及零值反映电路的不同的工作性质。

- 根据电压三角形可以得出总电压与电流之间的相位差 φ ，即

$$\varphi = \arctan \frac{U_L - U_C}{R} = \arctan \frac{U_X}{U_R}$$

- φ 角的正负表示总电压与电流的相位关系。也能反映电路的工作性质。
- **2. 串联电路的阻抗**

- 根据各元件的电压与电流的相量关系可得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = [R + j(X_L - X_C)]\dot{I} = \dot{I}Z$$

- 其中

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |Z|\angle\varphi$$

- 式中电抗 $\mathbf{X = XL-XC}$ ，
的模。

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

为复阻抗

- 阻抗角

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$$

• 3. 串联电路的性质

- 电抗 X 的正负决定阻抗角 φ 的正负，而阻抗角 φ 的正负反映总电压与电流的相位关系。
- 根据阻抗角 φ 为正、为负、为零的三种情况，将电路分为感性、容性和电阻性三种性质。
- （1）感性电路 当 $X_L > X_C$ 即 $X > 0$ ，有 $\varphi > 0$ ， $U_L > U_C$ ，总电压 u 比电流 i 超前 φ ，表明电感的作用大于电容的作用，电抗是电感性的，称感性电路。
- （2）容性电路 当 $X_L < X_C$ 即 $X < 0$ ，有 $\varphi < 0$ ， $U_L < U_C$ ，总电压 u 比电流 i 滞后 φ ，表明电容的作用大于电感的作用，电抗是电容性的，称容性电路。

- **[例 3.14]** 已知 **RLC** 串联电路中，交流电源电压 **$u = 311 \sin(314t - 30^\circ) \text{V}$** ， **$R = 30\Omega$** ， **$L = 445\text{mH}$** ， **$C = 32\mu\text{F}$** 。试求：**(1)** 电路中电流的瞬时表达 **i** ；**(2)** 电路中电压与电流的相位关系，并分析电路的性质；**(3)** 各元件上的电压 **U_R, U_L, U_C** 。

- **[解]** **(1)** 求电路中的电流 **I**

- $$X_L = \omega L = 314 \times 445 \times 10^{-3} \approx 140 \quad \Omega$$

- $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{3.14 \times 32 \times 10^{-6}} \approx 100 \quad \Omega$$

- $$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 50 \quad \Omega$$

- 故电流的大小为

- $$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{311}{\sqrt{2} \times 50} = 4.4 \quad \text{A}$$

- (2) 电路中电压与电流的相位关系

- $$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \frac{140 - 100}{30} = 53.1^\circ > 0$$

- 得：总电压比总电流超前 **53.1°**，电路呈感性。

- 电流的瞬时表达式为 $i = 4.4\sqrt{2} \sin(314t - 83.1^\circ)$

- (3) 各元件电压的有效值

- $$U_R = RI = 30 \times 4.4 = 132(V)$$

- $$U_L = X_L I = 140 \times 4.4 = 616(V)$$

- $$U_C = X_C I = 100 \times 4.4 = 440(V)$$

- 从计算结果发现，电感电压、电容电压都比电源电压高，在交流电路中各元件上的电压可以比总电压大，这是交流电路与直流电路特性的不同之处。

• 二、**RLC** 串联电路的功率

• **1.** 平均功率

- 在 **R**、**L**、**C** 串联的正弦交流电路中，流过各个元件的电流是相同的，故设电流 **i** 为参考正弦量，并设总电压和总电流的相位差（即阻抗角）为 **φ**，则电压与电流的瞬时值表达式为

- $$i = I_m \sin \omega t$$

- $$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- 电路的瞬时功率为

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

$$= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

- 电路的平均功率（有功功率）为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt = UI \cos \varphi$$

- 由上式可知，正弦交流电路的有功功率与阻抗角的余弦切角 **cosφ** 有关，**cosφ** 是计算正弦交流电路功率的重要因子，称为功率因数。

- 由电压三角形可知

$$U \cos \varphi = U_R$$

$$P = UI \cos \varphi = U_R I = RI^2$$

- **R、L、C** 串联电路的平均功率就等于电阻元件的平均功率，这是由于电感元件和电容元件的平均功率为零的缘故。

- 2. 无功功率
- 在 R、L、C 串联的正弦交流电路中，
- 电感元件的瞬时功率为 $p_L = u_L i$
- 电容元件的瞬时功率为 $p_C = u_C i$
- 由于电压 u_L 和 u_C 反相，因此当 p_L 为正值时，则 p_C 为负值，即电感元件吸收能量时，电容元件释放能量；反之，电感元件释放能量时，电容元件吸收能量。R、L、C 串联电路与电源之间能量交换的瞬时功率最大值即为无功功率 $Q = Q_L - Q_C = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I$
-
- 由上式根据电压三角形得 $Q = UI \sin \varphi$
- 对于感性电路， $\varphi > 0$ ，则 $Q > 0$ ；对于容性电路， $\varphi < 0$ ，则 $Q < 0$ 。为了计算方便，有时把容性电路的无功功率取为负值。例如一个电容元件的无功功率为 $Q = -Q_C = -U_C I$

• 3. 视在功率

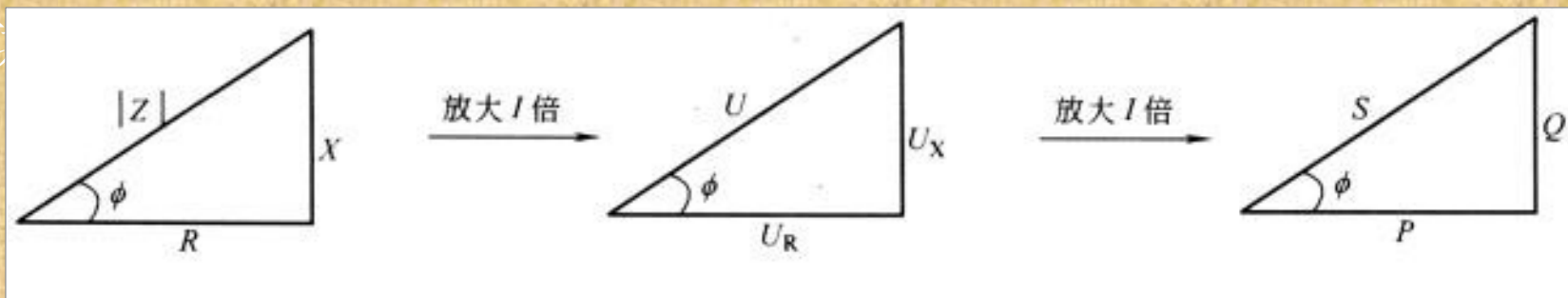
- 视在功率：电压和电流有效值的乘积，用 **S** 表示，即

$$S = UI$$

- 视在功率的单位为伏安（**VA**），代表了正弦交流电源向电路提供的最大功率，它反映的是用电设备的容量。
- 有功功率 **P**、无功功率 **Q** 和视在功率 **S** 三者之间构成直角三角形关系 $\varphi = \arctan \frac{Q}{P}$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- 阻抗三角形、电压三角形、功率三角形是三个相似直角三角形，电压三角形的边长是阻抗三角形的边长 I 倍，而功率三角形的边长是电压三角形的边长 I 倍。



- 消耗在电路中总的有功功率等于电路各部分有功功率之和，总的无功功率等于电路各部分无功功率之和。注意：有功功率为正，无功功率有正有负，但总的视在功率并不等于各部分视在功率之和。
- 交流电源设备都是按额定电压 U_N 和额定电流 I_N 设计和使用的，若供电电压为 U_N ，负载取用的电流应不超过 I_N ，电源的视在功率受到这两个额定值限制。有的供电设备，如变压器，就标明了额定视在功率，也称为变压器的容量，用 S_N 表示， $S_N = U_N I_N$

- 交流电源设备以额定电压 U_N 对负载供电，即使输出电流达到额定值 I_N ，也只是说明视在功率情况，并不能确定实际消耗功率，输出的有功功率还取决于负载的功率因数，即 $P_N = U_N I_N \cos \varphi$

•

- 式中 φ 为 u 、 i 的相位差，即阻抗角， φ 和功率因数 $\cos$ 取决于电路（负载）的参数。

- **【例 3-15】** 已知一阻抗 **Z** 上的电压、电流分别 $\dot{U} = 220\angle 30^\circ$
 $\dot{I} = 5\angle -30^\circ$ **A**（电压电流为关联参考方向），求 **Z**、**cosφ**、**P**、**Q**、**S**。

【解】

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{220\angle 30^\circ}{5\angle -30^\circ} = 44\angle 60^\circ$$

$$\cos \varphi = \cos 60^\circ = 0.5$$

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 5 \times 0.5 = 550(W)$$

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 953$$

var

$$S = UI = 220 \times 5 = 1100(VA)$$

第六节 电路的谐振

- 谐振电路最为明显的特征是整个电路呈电阻性，即谐振时电路的等效阻抗为 $Z_0=R$ ，总电压 u 与总电流 i 同相

- 一、串联谐振

- 在前图所示的 R 、 L 、 C 串联电路中，在正弦激励下，该电路的复阻抗为

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |Z|\angle\varphi$$

- 当 $X = X_L - X_C = 0$ 时，电路 $Z=R$ ，相当于纯电阻电路，其总电压 u 和 i 总电流同相。电路出现的这种现象称为谐振。
 - 串联电路出现的谐振又叫串联谐振。

1. 谐振条件与谐振频率

- 串联谐振的条件是 $\mathbf{XL=XC}$

- 即

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

- 通过改变 ω 、 $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{C}$ 三个参数，使电路发生谐振或消除谐振。

- (1) 当 $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{C}$ 固定时，可以改变电源的频率达到谐振。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

•

- 串联电路的谐振频率 $\mathbf{f_0}$ 与电阻 $\mathbf{R}$ 无关，它反映了串联电路的一种固有性质，所以又称为固有频率； ω_0 称为固

- (**2**) 当电源频率 **ω** 一定时, 可改变电容 **C** 或电感 **L** 使电路谐振。由式 (**3-77**) 可得调电容或调电感到

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

- 就可以使电路谐振。我们把调节 **L** 或 **C** 使电路谐振的过程称为调谐。

• 2. 串联谐振的基本特征

- 图 **3-32** 为串联谐振时的电压相量图。串联谐振的具有如下特征：

- (**1**) 电路的电抗 **X** 为零，阻抗最小，且为纯电阻性。

$$\mathbf{Z}=\mathbf{R} \quad , \quad |Z|=\sqrt{R^2+X^2}=R$$

- (**2**) 电路中的电流最大，且与外加电压同相。

- 由于谐振时，阻抗最小，故电流为最大，称为谐振电流 **I₀**。

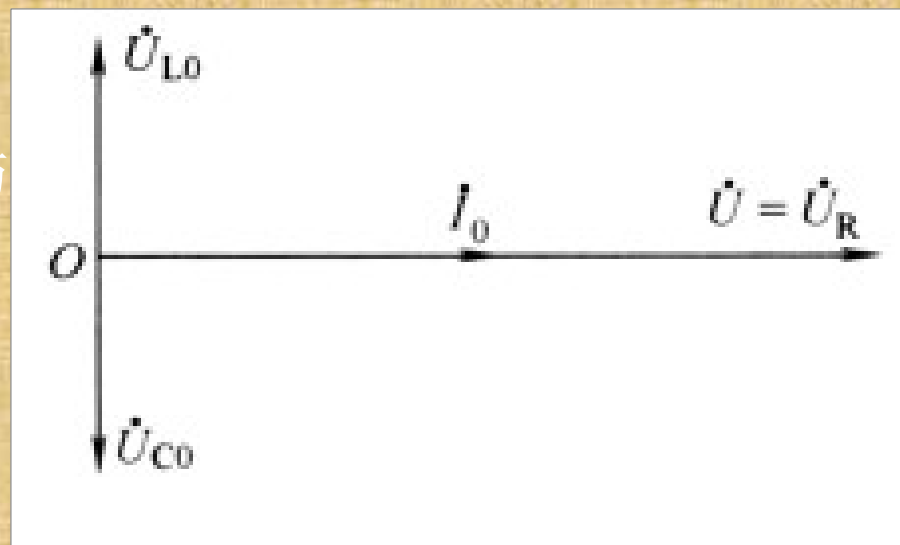
即
$$I_0 = \frac{U}{R}$$

•

- (**3**) 串联谐振时电感 **L** 与电容 **C** 上的电压相位相反，

大小相等：

$$U_{L0} = U_{C0} = X_{L0} I_0 = X_{C0} I_0$$



- 品质因数（**Q**）：**LC** 串联谐振时的电感或电容上的电压与总电压的比值。

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{X_{L0}I_0}{RI_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$U_{L0} = U_{C0} = QU$$

- 当 **RLC** 串联电路发生谐振时，电感 **L** 与电容 **C** 上的电压大小都是外加电压 **U** 的 **Q** 倍。
- 当 **Q>>1** 时，会在电感和电容两端出现远远高于外加电压 **U** 的高电压，称为过电压现象，所以串联谐振电路又叫做电压谐振电路。
- 实际应用中，**Q** 值可以高达几百倍，例如收音机的磁性天线回路就是一个串联谐振电路，用来利用串联谐振的过电压特点来提高微弱信号的幅值。
- 在电力系统中，由于电源电压本身较高，如果电路在接近于串联谐振的情况下工作，在电感和电容两端将出现过电压，从而烧坏电气设备。所以在电力系统中必须适当选择电路的参数 **L** 和 **C**，以避免出现谐振现象。

• 3. 串联谐振的应用

- 串联谐振电路在无线电工程应用较多。常用来对交流信号进行选择，例如接收机中用来选择电台信号，即调谐。其作用是将需要的接收信号从天线所收到的许多不同频率的信号中选择出来，而对其它未被选中的信号尽量加以抑制。

- 在 **RLC** 串联电路中，

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

- 串联谐振电路的谐振曲线如图 **3-33** 所示的曲线，该曲线反映了电流大小与频率的关系。
- 从曲线上可以看出，当信号频率等于谐振频率时，电路发生串联谐振，电路中的电流达到最大值，而稍微偏离谐振频率的信号电流则大大减小，说明电路具有明显的选频特性，简称选择性。谐振曲线越尖锐，表明选择性越好。
- 品质因数 **Q** 值越大，选择性越好，电路选择性的好坏取决于对非谐振频率信号的抑制能力强弱。

- 实际应用中，并非 **Q** 值越大越好，**Q** 值增大，谐振电路允许通过信号的频率范围就会减小。
- 通常规定电流有效值 **I** 等于最大值 **I₀** 的 **0.707** 倍所对应的频率范围（**f₁ ~ f₂**）叫做串联谐振电路的通频带宽度（又叫做频带宽度），简称通频带，用符号 **Δf** 表示，单位也是赫兹 (**Hz**)。
- 串联谐振电路的通频带为
$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$
- 通频带与品质因数成反比关系，品质因数 **Q** 值越大，说明电路的选择性越好，曲线较尖锐，但通频带较窄；反之，品质因数 **Q** 值越小，说明电路的选择性越差，但曲线变平坦时通频带变宽。
- 选择性与频带宽度是互为相反关系的两个物理量。

- **[例 3-16]** 收音机的输入回路可以用图 **3-35** 所示的等效电路来表示。设线圈的电阻为 **16Ω** ，电感为 **0.4mH** ，电容为 **600pF** 。试求：

- （**1**）电路的谐振频率，总阻抗和品质因数；
- （**2**）当频率高于谐振频率 **20%** 时，电路的总阻抗。

- **[解]** （**1**）电路发生谐振时，谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.4 \times 10^{-3} \times 600 \times 10^{-12}}} = 325$$

（**kHz**）

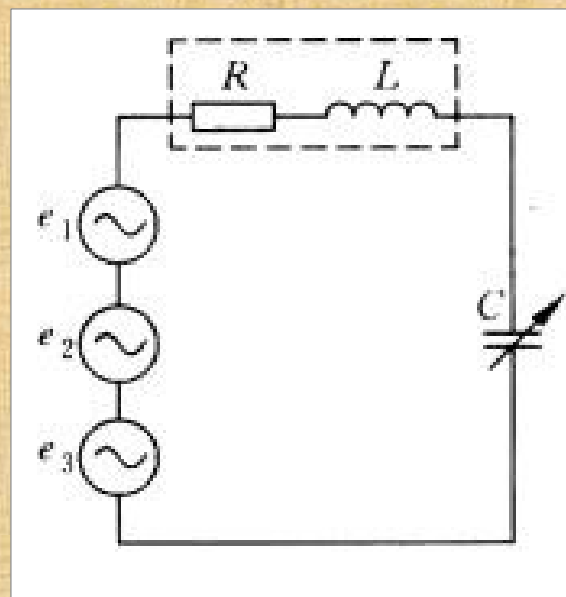
- 总阻抗

- **$|Z| = R = 16\Omega$**

- 品质因数

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{2 \times 3.14 \times 325 \times 10^3 \times 0.4 \times 10^{-3}}{16}$$

=51



- **2)** 当频率高于谐振频率 **20%** 时, **$f = 1.2f_0$** , 则感抗为

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 1.2 \times 325 \times 10^3 \times 0.4 \times 10^{-3} = 980$$

(Ω)

- 容抗为 $X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1.2 \times 325 \times 10^3 \times 600 \times 10^{-12}} = 680$

(Ω)

- 总阻抗为 $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{16^2 + (980 - 680)^2} = 300.4$

(Ω)

- 计算表明, 在串联电路中, 只有谐振时总阻抗最小, 当偏离谐振频率时, 电路的总阻抗迅速增加。

- 二、并联谐振

- (一) **RLC** 并联谐振电路

- **RLC** 并联谐振电路同串联谐振一样，当端电压 与总电流同相时，电路的工作状态称为并联谐振。

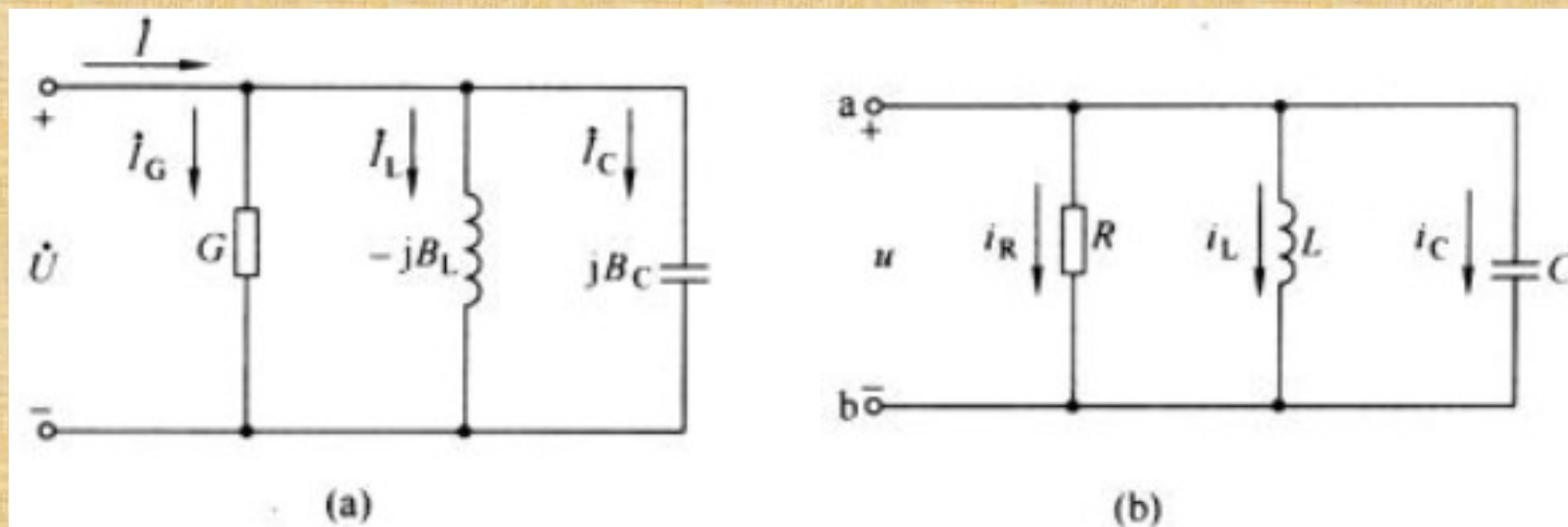


图 3-36 RLC 并联谐振电路

1. 谐振频率和谐振条件

- **RLC** 并联电路的复导纳:

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C - B_L)$$

- 发生并联谐振的条件是复导纳的虚部为零，总电压与总电流同相，呈纯电阻特性，

即

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

- 发生并联谐振时角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- 并联谐振频率与串联谐振频率一样，也只决定于电路中的电感 **L** 和电容 **C**，与并联电阻 **R** 无关，所以谐振频率也为固有频率。

• 2. 并联谐振的特点

- (1) 导纳 **Y** 为最小值，阻抗 **Z=1/Y** 为最大值，且为纯阻性， **Y=G=1/R**，。

- (2) 谐振时总电流 为最小，且与总电压同相。

- (3) 并联谐振时电感与电容上的电流相等，为

- $$I_{L0} = I_{C0} = B_L U = B_C U$$

- **RLC** 并联谐振时的电感或电容上的电流与总电流的比值叫做该电路的品质因数

- $$Q = \frac{B_L}{G} = \frac{B_C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0 C}{R}$$

- $$I_{L0} = I_{C0} = Q I_0$$

- 当 **RLC** 并联电路发生谐振时，电感 **L** 与电容 **C** 上的电流大小都是输入总电流的 **Q** 倍，即支路电流是总电流的 **Q** 倍。当 **Q>>1** 时，会在电感和电容中出现远远高于总电流的过电流，称为过电流现象，所以并联谐振电路又叫做电流谐振电路。

- (二) 电感线圈和电容并联的谐振电路

- 工程上常用电感线圈与电容并联的谐振电路。如图 **3-37 a)** 所示，电感线圈具有内阻，所以用 **R** 和 **L** 串联模型来表示。

- 电感支路的复导纳为

$$Y_1 = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- 电容支路的复导纳为

$$Y_2 = j\omega C$$

- 则并联电路的总导纳为

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

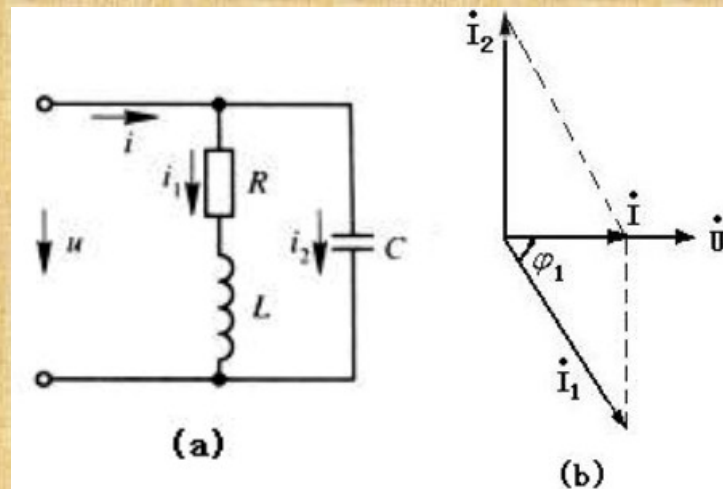


图 3-37 电感线圈和电容并联电路

- 当电路总导纳的虚部为零时，总电压与总电流同相，电路处于谐振状态，故谐振条件为：

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$

- 即

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

- 电路的谐振频率完全由电路的参数决定，而且只有

$$R < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$1 - \frac{CR^2}{L} > 0$$

当
。

，即

时，电路才存在谐振频率

- 当 $\omega L \gg R$ 时， $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 和频率分别为 $f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 时谐振的角频率

- 此时的谐振频率近似等于 **RLC** 并联电路和串联电路的谐

- 忽略电感线圈内阻 **R** 情况下，谐振时各支路的电流大小为

$$I_{L0} \approx \frac{U}{\omega_0 L}$$

$$I_{C0} \approx \omega_0 C U$$

$$I_{L0} \approx I_{C0}$$

- 说明谐振时电感支路和电容支路上的电流几乎大小相等、方向相反。

- 由于内阻 **R**，电流 I_0 也必然很小，有

$$I_0 \approx U \frac{R}{(\omega_0 L)^2}$$

- 电感线圈和电容并联电路发生谐振时，取电感或电容（忽略 **R**）的支路电流与总电流之比，为该电路的品质

因数,
$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

【例 3-17】 如图 **3-37** 所示的 **LC** 并联谐振电路，已知 **$R = 10\Omega$** ， **$L = 80\mu\text{H}$** ， **$C = 320\text{pF}$** ，谐振状态下总电流 **$I = 20\mu\text{A}$** ，试求：该电路的固有谐振频率 **f_0** 、品质因数 **Q** 以及电感 **L** 支路与电容 **C** 支路的电流。

【解】 谐振角频率为

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{80 \times 10^{-6} \times 320 \times 10^{-12}}} \approx 6.25 \times 10^6$$

$$(rad/s)$$
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1$$

品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{6.25 \times 10^6 \times 80 \times 10^{-6}}{10} = 50$$

电感 **L** 支路 $I_{L0} = I_{C0} = QI = 50 \times 20 \times 10^{-6} = 1$

mA

第七节 功率因数的提高

一、提高功率因数的意义

- 有功功率为 $P = UI \cos \varphi$ ， $\cos \varphi$ 称为电路功率因数。
- 功率因数是用电设备的重要技术指标，它表示电路实际付出的有功功率与电路占用电源功率的比例，功率因数低的电路可能实际消耗的功率不大，却要占用较大的电源容量。
- 交流电路的负载多为电感性负载，交流感应电动机在额定负载时，功率因数约在 **0.8 ~ 0.85**，轻载时只有 **0.4 ~ 0.5**，空载时更低，仅为 **0.2 ~ 0.3**，不装电容器的日光灯的功率因数为 **0.45 ~ 0.60** 左右。
- 1.** 充分利用电源设备的容量
- 提高用户的功率因数，可以使同等容量的供电设备向用户提供更多的有功功率，提高供电能力。

- **2. 减小输电线路上的能量损失**
- 当负载的有功功率 **P** 和电压 **U** 一定时，功率因数越大，输电线上的电流越小，线路上的能量损失就越少。
- **3. 提高供电质量**
- 负载的有功功率 **P** 和电压 **U** 一定时，功率因数增大，减小了输电电流，所以线路内阻上的电压降落减少，这样，负载电压与电源电压更接近，供电质量更高。
- **4. 节约用铜**
- 只要提高功率因数使输电线上的电流减小，就可能减小输送导线的截面积，节约铜材。

二、提高功率因数的方法

- 可以从两方面来考虑提高功率因数。
- 一方面是提高设备的自然功率因数，主要办法有改进电动机的运行条件、合理选择电动机的容量或采用同步电动机。
- 另一方面是采用无功补偿措施，主要方法是在通常的电感性电路中，人为地并联电容性负载，利用电容性负载的超前电流来补偿电感性负载的电流滞后，减小电感性负载电流对电压的滞后角度，达到提高功率因数的目的。

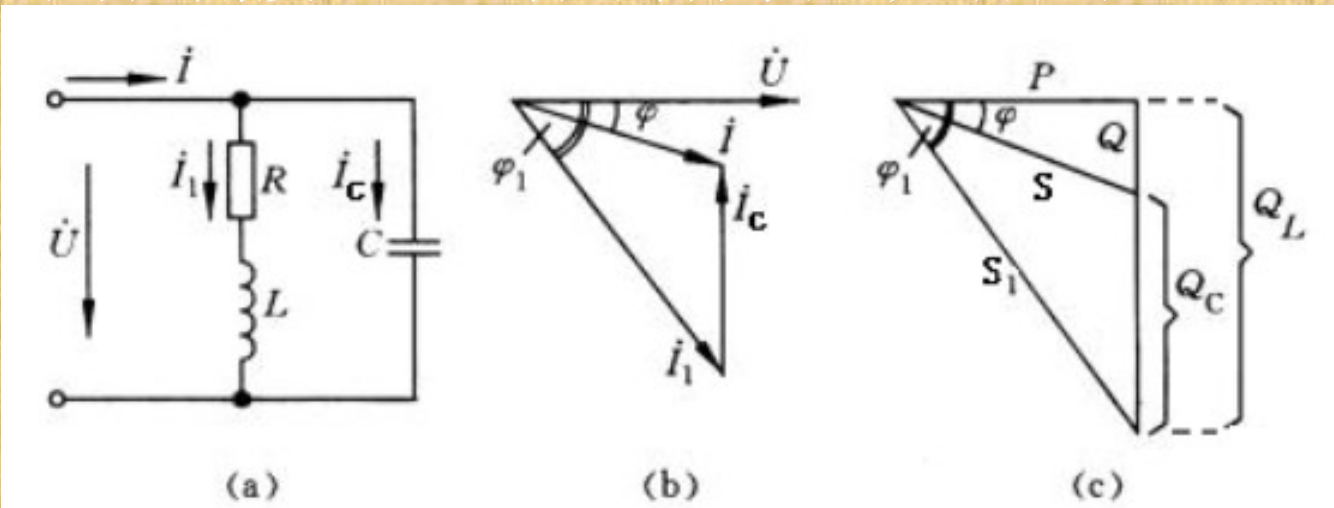


图 3-38 电容器补偿电路

- 图 **3-38 a)** 给出了一个电感性负载并联电容时的电路图，图 **3-38b)** 是它的相量图
- 从相量图中我们可以看出，电感性负载未并联电容时，电流 滞后于电压 的相位为 φ_1 ，此时电路的总电流 等于负载电流；并联电容后，由于端电压 不变，则负载电流 也没有变化，但电容支路的电流 超前于端电压 90° ，电路的总电流 发生了变化，此时
 - $$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C$$
- 且必然有 $I < I_1$ ，即总电流在数值上（有效值）减小了，同时总电流 与端电压 之间的相位差也变小，从 φ 小到 φ_1 ，因此功率因数从 $\cos \varphi$ 到 $\cos \varphi_1$ 。

- 若已知感性负载（ $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{P} \cos \varphi_1$ ），并需要将功率因数提高到 $\cos \varphi$ ，利用功率三角形可以计算所并联电容器的无功功率 $\mathbf{QC}$ 和电容量 $\mathbf{C}$ 。

- 所需并联电容的无功功率为

$$Q_C = P(\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

由于

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = \omega C U^2$$

- 因此所需并联电容器的容量为

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2} = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

- [例 3-18]** 两个负载并联，接到 **220V**、**50Hz** 的电源上。
 一个负载的功 $P_1 = 2.8kW$ ，功 $\cos \varphi_1 = 0.8$
 （感性），另一个负载的功率 $P_2 = 2.42kW$ ， $\cos \varphi_2 = 0.5$ 率因
 数 （感性）。

试求：

- （1）电路的总电流和总功率因数；
- （2）电路消耗的总功率；
- （3）要使电路的功率因数提高到 **0.92**，需并联多大的电容？此时，电路的总电流为多少？

解：（1）

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} = \frac{2800}{220 \times 0.8} = 15.9$$

A

$$I_2 = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2} = \frac{2420}{220 \times 0.5} = 22$$

A

由于

$$\cos \varphi_1 = 0.8$$

$$\cos \varphi_2 = 0.5$$

$$\varphi_1 = 36.9^\circ$$

$$\varphi_2 = 60^\circ$$

，故

设电源电压

$$\dot{U} = 220 \angle 0^\circ$$

V,

则

$$\dot{I}_1 = 15.9 \angle -36.9^\circ$$

$$\dot{I}_2 = 22 \angle -60^\circ$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 15.9 \angle -36.9^\circ + 22 \angle -60^\circ = 37.1 \angle -50.3^\circ$$

$$I = 37.1 \text{ A}$$

$$\varphi' = -50.3^\circ$$

因此总电流为

$$\cos \varphi' = \cos(-50.3^\circ) = 0.64,$$

总功率因数为

$$P = P_1 + P_2 = 2.8 + 2.42 = 5.22 (\text{kW})$$

(2)

$$\cos \varphi = 0.92$$

$$\varphi = 23.1^\circ$$

(3) 由于功率因数要提高到

, 故

需并联的电容量为

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi' - \tan \varphi) = \frac{5.22}{2 \times 3.14 \times 220^2} (\tan 50.3^\circ - \tan 23.1^\circ) = 263$$

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{5220}{220 \times 0.92} = 25.8$$

uF

并联电容后的总电流为

A

- 注意：
- （**1**）并联电容器后，对原感性负载的工作情况没有任何影响，即流过感性负载的电流和它的功率因数均未改变。这里所谓的功率因数提高了，是指包括电容器在内的整个电路的功率因数比单独的感性负载的功率因数提高了。
- （**2**）线路电流的减小，是电流无功分量减小的结果，而电流的有功分量并未改变，这从相量图上可以清楚的看出。实际生产中，并不要求把功率因数提高到**1**，即补偿后仍使整个电路呈感性，感性电路的功率因数习惯上称滞后功率因数。若将功率因数提高到**1**，需要并联的电容较大，会增加设备投资。
- （**3**）功率因数提高到什么程度为宜，在作具体的技术、经济指标比较之后，才能确定。